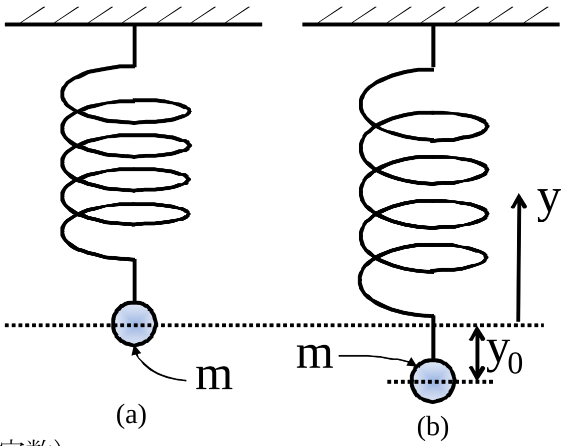
第 2 章　線形 2 階常微分方程式の諸問題

§4　バネの問題を例にとった現象記述



[1]　質量 m のおもりをコイルバネによって天井から吊るす. バネが伸びてちょうど釣り合った状態を(a)とする．このときのおもりの重心を原点として，(b)の状態のように下方に y_0 だけバネを引き伸ばして手を離す. この後のおもりの運動はどのようになるか.

ただし，コイルバネは,

$$F = -ky \qquad (1)$$

F：力　，　k：比例定数（バネ定数）

のように，変異量 y に比例した復元力を有しているものとする.

この現象を微分方程式として記述する.

〈1〉 変数

・独立変数は t

・おもりの運動を知りたいので，重心の釣り合い位置からの変位 y を未知変数とする.

差異としても扱えるが原点を釣り合いの位置に定めて座標 y をとり，基準量として扱う.

〈2〉 現象の成り立ち

Newton の第 2 法則をもとに考える.

（おもりの質量）×（おもりの加速度）＝　（外力）

＝（バネの復元力）

〈3〉〈4〉 δt の間の変化を考えて Taylor 展開を利用し，微分方程式を導く.

おもりの速度

$$v = \frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t}$$

$$= \frac{1}{\delta t}\left\{ y(t) + \frac{dy}{dt}\delta t - y(t) \right\}$$

$$= \frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

おもりの加速度　$a=\dfrac{v(t+\delta t)-v(t)}{\delta t}$

$$=\frac{1}{\delta t}\left\{v(t)+\frac{dv}{dt}\delta t-v(t)\right\}$$

$$=\frac{dv}{dt} \qquad (3)$$

式(3)に式(2)を代入すると，

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (4)$$

次に，外力について．

重力は引張り力と釣り合っているので打ち消されている．

・重力はバネの復元力とは関係のない張力と釣り合っているので打ち消されている．

・バネの変位に伴う復元力は，変位の向きと逆向きの変位量と比例していく．

$$F=-ky \qquad (1)$$

以上から，〈2〉の概念式にそって

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}y=0 \qquad (5)$$

という微分方程式が得られる．

〈5〉初期条件

2 階の微分方程式は，2 つの条件を与える必要がある．

（方程式の最高階と条件の階数と一致している必要がある.）

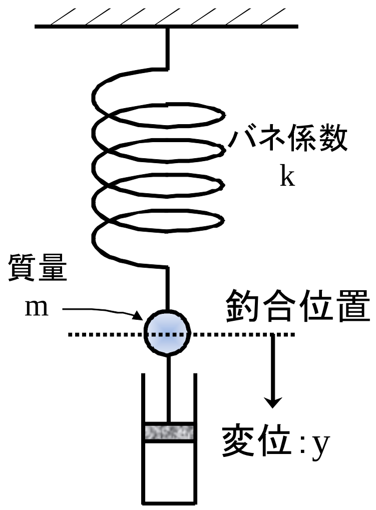
$$\begin{cases} \cdot\ t=0, \quad y=y_0 & (6) \\ \cdot\ t=0, \quad v=\dfrac{dy}{dt}=0 & (7) \end{cases}$$

〈６〉成立条件

バネが弾性限界を超えない範囲で成立する．

[2]　以下のような問題における微分方程式を求める．

《問》右図のように，バネに繋がれたおもりのもう一方の端に減速用のシリンダー（ダッシュポット）が取り付けられている．このダッシュポットは，おもりの変位速度 v に比例する力を及ぼすことが知られている．すなわち，$R=-\beta v$（R：減衰力，β：比例定数）このような系（スプリング・ダッシュポット系）におけるおもりの運動を表す微分方程式を導くこと．



《解》

〈1〉は同じ．

〈2〉（おもりの質量）×（おもりの加速度）

＝（バネの復元力ーダッシュポットの抵抗力）

〈3〉

$$v=\frac{y(t+\delta t)-y(t)}{\delta t}=\frac{1}{\delta t}\left\{y(t)+\frac{dy}{dt}\delta t-y(t)\right\}=\frac{dy}{dt}\qquad(2)$$

$$a=\frac{v(t+\delta t)-v(t)}{\delta t}=\frac{1}{\delta t}\left\{v(t)+\frac{dv}{dt}\delta t-v(t)\right\}=\frac{dv}{dt}\qquad(3)$$

式(3)に式(2)を代入すると

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}$$

復元力 $:F=-ky$　　(4)

抵抗力 $:R=-\beta v=-\beta\dfrac{dy}{dt}$　　(5)'

以上を概念式に入れると，

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-\beta\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\beta}{m}\frac{dy}{dt}+\frac{k}{m}y=0\qquad(6)$$

〈4〉初期条件

$$\begin{cases}\cdot\ t=0,\quad y=y_0 & (7)\\ \cdot\ t=0,\quad v=\dfrac{dy}{dt}=0 & (8)\end{cases}$$

〈5〉成立条件

変位が
- バネの弾性限界を超えない範囲
- ダッシュポットのシリンダーのシリンダー長を超えない範囲